第50卷第2期 数学学报中文版 Vol.50, No.2
2007年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)02-0333-04 文献标识码: A

一个包含Smarandache原函数的方程

李洁

西北大学数学系 西安 710069
E-mail: lijie@nwu.edu.cn

摘 要 设 p 为素数, n 为任意正整数, 我们定义 Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 为最小正整数 k, 使得 $p^n \mid k!$, 即 $S_p(n) = \min\{k \in N : p^n \mid k!\}$. 本文利用初等方法研究了方程 $S_p(1) + S_p(2) + \cdots + S_p(n) = S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 的可解性, 并给出了该方程的所有正整数解.

关键词 Smarandache 原函数; 可解性; 正整数解
MR(2000) 主题分类 11B83
中图分类 O156.4

An Equation Involving the Smarandache Primitive Function

Jie LI

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, P. R. China
E-mail: lijie@nwu.edu.cn

Abstract Let p be a prime, n be any positive integer. We define the Smarandache primitive function $S_p(n)$ as the smallest positive integer such that $S_p(n)!$ is divisible by p^n. In this paper, we use the elementary methods to study the solvability of the equation $S_p(1) + S_p(2) + \cdots + S_p(n) = S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$, and give all its solutions.

Keywords Smarandache primitive function; solvability; solutions
MR(2000) Subject Classification 11B83
Chinese Library Classification O156.4

1 引言及结论

设 p 为素数, n 为任意正整数, 我们定义 Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 为最小的正整数 k, 使得 $p^n \mid k!$, 即

$$S_p(n) = \min\{k \in N : p^n \mid k!\}.$$

例如, $S_3(1) = 3$, $S_3(2) = 6$, $S_3(3) = 9$, $S_3(4) = 9, \ldots$. 在文献 [1] 中的第 47, 48 和 49 个问题中, 美籍罗马尼亚著名数论专家 Smarandache 教授建议我们研究函数 $S_p(n)$ 的性质. 为方便起见, 我们称函数 $S_p(n)$ 为 Smarandache 原函数. Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 与著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 之间有着非常紧密的联系, 此处

$$S(n) = \min\{m : m \in N, n \mid m!\}.$$

收稿日期: 2005-11-08; 接受日期: 2006-03-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671155)

从 $S(n)$ 的定义容易得到 $S(p)=p$, 且当 $n\neq 4$, $n\neq p$ 时, $s(n)<n$. 因此有

$$\pi(x)=-1+\sum_{n=2}^{[x]}\left[\frac{S(n)}{n}\right].$$

其中 $\pi(x)$ 表示小于 x 的素数的个数.

Smarandache 函数 $S(n)$, Smarandache 原函数 $S_p(n)$ 以及关于 Smarandache 原函数方程的研究是数论中一个重要且很有意义的课题, 因此许多学者都对此作了研究 [2–6]. 张文鹏和刘端森在文 [2] 中给出了 $S_p(n)$ 的一个有趣的渐近公式, 即对任意给定的素数 p 和任意的正整数 n, 有

$$S_p(n)=(p-1)n+O\left(\frac{p}{\ln p}\cdot\ln n\right).$$

梁放池和易媛 [3] 指出: 令 p 为素数, n 为任意的正整数, 则对于任意实数 $x\geq 2$, 有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ S_p(n+1)=S_p(n)}}1=\frac{x}{p}+O\left(\frac{\ln x}{\ln p}\right).$$

以上工作的美中不足是他们仅给出了方程解之和的渐近公式. 本文利用初等方法研究了方程

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

的可解性, 并给出了该方程的所有正整数解. 即就是我们证明了下面的结论:

定理 令 p 为给定的素数, n 为任意正整数, 则方程

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \tag{*}$$

有有限个解. 它们是 $n=1,2,\ldots,[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}]$, 此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

特别对 $p=3,5,7$, 我们有:

推论 1 方程 $S_3(1)+S_3(2)+\cdots+S_3(n)=S_3(\frac{n(n+1)}{2})$ 的所有正整数解为 $n=1,2$.

推论 2 方程 $S_5(1)+S_5(2)+\cdots+S_5(n)=S_5(\frac{n(n+1)}{2})$ 的所有正整数解为 $n=1,2$.

推论 3 方程 $S_7(1)+S_7(2)+\cdots+S_7(n)=S_7(\frac{n(n+1)}{2})$ 的所有正整数解为 $n=1,2,3$.

2 两个简单引理

为了完成定理的证明, 我们需要引入下面的:

引理 1 对任意正整数 $m_1,m_2,\ldots,m_n$ 且 $(m_1,m_2,\ldots,m_n)=1$, 我们有

$$m_1!m_2!\cdots m_n!\mid(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!.$$

证明 因为 $(m_1,m_2,\ldots,m_n)=1$, 所以存在整数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 使得 $a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_nm_n=1$. 所以上式两边乘以 $(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!$ 可得

$$\begin{aligned}&a_1m_1(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!+a_2m_2(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!+\cdots\\&\quad+a_nm_n(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!\\&=(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!.\end{aligned}\tag{1}$$

注意到 $(m_1-1)!m_2!\cdots m_n!|(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!$, 所以 $m_1!m_2!\cdots m_n!\mid(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_1$. 同理可得

$$m_1!m_2!\cdots m_n!\mid(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_2.$$

$$\cdots$$

$$m_1!m_2!\cdots m_n!\mid(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!m_n.$$

结合 (1) 我们有

$$m_1!m_2!\cdots m_n! \mid (m_1+m_2+\cdots+m_n-1)!.$$

这样便证明了引理 1.

引理 2 设 n 是正整数, p 是素数, 满足 $p^\alpha \parallel n!$, 那么 $\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$.

证明 见文献 [7] 中第一章定理 2.

3 定理的证明

这节我们来完成定理的证明.

首先, 由 $S_p(k)$ 的定义可知, 当且仅当 $k\le p$ 时, $S_p(k)=pk$. 如果 $k>p$, 则 $S_p(k)<pk$. 因此假如 $\frac{n(n+1)}{2}\le p$, 即 $1\le n\le[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}]$, 此处 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 那么

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}p. \tag{2}$$

注意到 $[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}]\le p$, 因此当 $1\le n\le[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}]$ 时

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=p+2p+\cdots+np=\frac{n(n+1)}{2}p. \tag{3}$$

结合 (2) 及 (3) 式, 容易得到 $n=1,2,\ldots,[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}]$ 是方程 (*) 的解.

如果 $[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}]<n\le p$, 则 $\frac{n(n+1)}{2}>p$, 那么

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)<\frac{n(n+1)}{2}p,$$

然而

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=\frac{n(n+1)}{2}p.$$

因此, 方程 (*) 无解.

如果 $n=p+1$, 则 $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=p+2p+\cdots+p\cdot p+p\cdot p=\frac{p(p+3)}{2}p$.

则当 $p=2$ 时, $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_2(1)+S_2(2)+S_2(3)=\frac{2(2+3)}{2}2=10$, 而 $S_p(\frac{n(n+1)}{2})=S_2(6)=8<10$. 所以此种情况下方程 (*) 无解.

当 $p=3$ 时, $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=S_3(1)+S_3(2)+S_3(3)+S_3(4)=\frac{3(3+3)}{2}3=27$, 而 $S_p(\frac{n(n+1)}{2})=S_3(10)=24<27$. 所以此种情况下方程 (*) 也无解.

当 $p>3$ 时, 考虑到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{\frac{(p^2+3p-2)}{2}p}{p^i}\right]&=\frac{p^2+3p-2}{2}+\left[\frac{p^2+3p-2}{2p}\right]\\&=\frac{p^2+3p-2}{2}+\frac{p+1}{2}=\frac{p^2+4p-1}{2}\ge\frac{(p+1)(p+2)}{2},\end{aligned}$$

所以

$$S_p\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}\right)\le\frac{(p^2+3p-2)}{2}p<\frac{p(p+3)}{2}p,$$

即

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

从而 $n=p+1$ 不是方程 (*) 的解.

如果 $n \geq p+2$, 那么总存在 $m_i \leq i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 使得 $S_p(1)=m_1p, S_p(2)=m_2p,\ldots,S_p(n)=m_np$. 所以

$$S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)=m_1p+m_2p+\cdots+m_np=(m_1+m_2+\cdots+m_n)p. \tag{4}$$

事实上, 我们有 $m_1=1, m_2=2,\ldots,m_p=p$, 并且由 $S_p(n)$ 的定义, 有

$$j \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_jp}{p^i}\right], \quad (1 \leq j \leq n). \tag{5}$$

另一方面, 注意到 $m_{p+1}=p$, $m_{p+2}=p+1$, 所以 $m_p, m_{p+1},\ldots,m_n$ 互素, 当 $p>2$ 时, 利用 Gauss 取整函数 $[x]$ 的性质并结合引理 1, 2 及 (5) 式, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right]\\
&=m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1}{p^i}\right]\\
&=m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n-1)p+p-1}{p^i}\right]\\
&=m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\frac{p(p-1)}{2}p+p-1+(m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1)p}{p^i}\right]\\
&\geq m_1+m_2+\cdots+m_n-1+\sum_{i=2}^{\infty}\left[\frac{\frac{p^2(p-1)}{2}+p-1}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1}{p^i}\right]\\
&\geq m_1+m_2+\cdots+m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p+m_{p+1}+\cdots+m_n-1}{p^i}\right]\\
&\geq\left(m_p+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_p}{p^i}\right]\right)+\left(m_{p+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_{p+1}}{p^i}\right]\right)+\cdots+\left(m_n+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_n}{p^i}\right]\right)+m_1+m_2+\cdots+m_{p-1}\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_1p}{p^i}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_2p}{p^i}\right]+\cdots+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m_np}{p^i}\right]\geq 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

也就是说 $p^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid ((m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1)!$. 因此

$$S_p\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \leq (m_1+m_2+\cdots+m_n)p-1<(m_1+m_2+\cdots+m_n)p. \tag{6}$$

结合 (4), (6) 式立刻得到 $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p(\frac{n(n+1)}{2})$. 当 $p=2$ 时, 同理于上面的分析, 容易得到 $S_p(1)+S_p(2)+\cdots+S_p(n)>S_p(\frac{n(n+1)}{2})$. 所以, 当 $n \geq p+2$ 时, 方程 (*) 无解.

综合以上各种情况, 我们立刻完成定理的证明.

参 考 文 献

[1] Smaradache F., Only problems, not solutions, Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] Zhang W. P., Liu D. S., Primitive number of power p and its asymptotic property, *Smarandache Notions Journal*, 2002, **13**: 173–175.
[3] Liang F. C., Yi Y., The primitive number of power p and its asymptotic property, Research on Smarandache Problems in Number Theory, Phoenix: Hexis, 2004, 129–131.
[4] Erdös P., Problem 6674, *Amer. Math.*, 1991, **98**: 965.
[5] Ashbacher C., Some properties of the smarandache-kurepa and smarandache-wagstaff functions, *Mathematics and Informatics Quarterly*, 1997, **7**: 114–116.
[6] Begay A., Smarandache ceil functions, *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 1997, **16E**: 227–229.
[7] Pan C. D., Pan C. B., Elementary number theory, Beijing: Beijing University Press, 2003 (in Chinese).